الأستاذ : حشاني حكيم	المستوى : 3 ع ت	التاريخ : 04 / 02 / 2014	المؤسسة : ثانوية الطريق الوطني رقم 61 ليوة
المدة:	الموضوع : الأعداد المركبة		

الكفاءة المستهدفة: إجراء العمليات على الأعداد المركبة - حساب طويلة وعمدة عدد مركب غير معدوم - الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل الهندسي ...

مخطط المذكرة : * التمهيد (أنشطة استكشاف أو لطرح إشكال ..)

* الدرس (تعاريف، خواص، مبرهنات، طرائق، جداول، ملاحظات، أمثلة، ....)

* التقويم (أنشطة تقويم نهائي للدرس)

المرحلة	الأنشطة	المدة
تمهيد	نشاط	

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(x-3)^2=4$
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(x-3)^2=-4$

الحل:

1) $(x-3)^2=4 \Rightarrow (x-3)=\sqrt{4}$

$(x-3)=-\sqrt{4}$

$\Rightarrow x=5$ أو $x=1$

$\Rightarrow S=\{1,5\}$

2) $(x-3)^2=-4$ (*)

هذه المعادلة لا تقبل حلول في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

لأن $(x-3)^2 \geq 0$ لكن $-4<0$.

- نفرض أنه توجد مجموعة نرمز إليها بالرمز $\mathbb{C}$ تشمل $\mathbb{R}$ ويكون فيها (-1) مربعًا تامًا.

أي يوجد عدد في $\mathbb{C}$ نرمز له بالرمز i حيث $i^2=-1$.

- نحاول حل (*) في $\mathbb{C}$:

$$(x-3)^2=-4 \Rightarrow (x-3)^2=-1\times 4$$

$$\Rightarrow (x-3)^2=i^2\times 2^2$$

$$\Rightarrow (x-3)^2=(i\times 2)^2$$

$$\Rightarrow (x-3)^2-(i\times 2)^2=0$$

$$\Rightarrow \left[(x-3)-(2i)\right]\left[(x-3)+(2i)\right]=0$$

ومنه: $x-3-2i=0$

أو $x-3+2i=0$

إذن $x=3+2i$

$x=3-2i$ نسمي هذا المقدار بالعدد المركب

الشكل الجبري للعدد المركب:

○ تعريف: نسمي عددًا مركبًا كل عدد z يكتب $z=x+iy$ حيث x و y عددين حقيقيين و i عدد مركب حيث $i^2=-1$

ترميز:
نرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$
x: يسمى الجزء الحقيقي ونرمز له بالرمز: $Re(z)=x$
y: يسمى الجزء التخيلي ونرمز له بالرمز: $Im(z)=y$

- إذا كان $x=0$ ، يسمى z عدد تخيلي صرف (بحت)
- إذا كان $y=0$ يسمى z عدد حقيقي.
- يكون z عدد حقيقي موجب إذا كان $y=0$ و $x\geq 0$
- يكون z عدد حقيقي سالب إذا كان $y=0$ و $x\leq 0$.
- إذا كان $z=0$ نقول أن z حقيقي وتخيلي في آن واحد.
- الكتابة: $z=x+iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z.

* تساوي عددين مركبين:
ليكن z و z' عددين مركبين حيث $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$
- يكون z و z' متساويان أي $z=z'$ إذا وفقط إذا كان $x=x'$ و $y=y'$.
* العمليات على الأعداد المركبة:
الجمع والضرب والقسمة هي إمتداد لهذه العمليات في $\mathbb{R}$.
تمرين:
- أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية وحدد الجزء الحقيقي والتخيلي
1) $(3-2i)+(-5+8i)$ 3) $(\frac{2}{5}i-3)(3i-2)$
2) $(1-5i)(3i+4)$

الحل:
تمرين:
Z عدد مركبا حيث: $Z=x+iy$.
- أكتب العدد L على الشكل الجبري حيث $L=(1-2i)Z+3-2i$
الحل:
التمثيل الهندسي لعدد المركب:
المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس (المستوي المركب)
التمثيل النقطي:
نتيجة: كل عدد مركب $Z=x+iy$ يمثل نقطيا بالنقطة $M(x;y)$
M تسمى صورة العدد المركب Z و Z يسمى لاحقة النقطة M
إذن من أجل كل $M(x;y)$ يوجد عدد مركب $Z=x+iy$ والعكس صحيح
أمثلة:
هات صور الأعداد المركبة التالية ومثلها نقطيا.
1) $Z=3-2i$ 3) $b=5+2i$ $d=3i$
2) $a=1+i$ 4) $c=2i-2$.

المؤسسة : ثانوية الطريق الوطني رقم 61 ليوة	التاريخ : 2014/10/05	المستوى : 3 ع ت	الأستاذ : حشاني حكيم

الموضوع : الأعداد المركبة **المدة:**

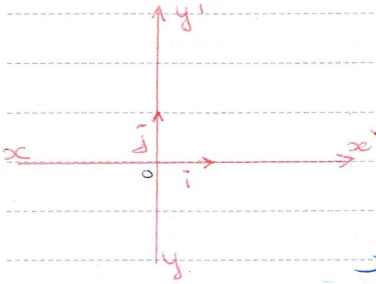
الكفاءة المستهدفة: إجراء عمليات على الأعداد المركبة - حساب طويلة وعمدة عدد مركب غير معدوم - الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل الهندسي

مخطط المذكرة : * التمهيد (أنشطة استكشاف أو لطرح إشكال ..)

* الدرس (تعاريف، خواص، مبرهنات، طرائق، جداول، ملاحظات، أمثلة، ....)

* التقويم (أنشطة تقويم نهائي للدرس)

المرحلة	الأنشطة	المدة
الدرس		



الحل : تعيين صور الأعداد المركبة وتمثيلها هندسيا في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

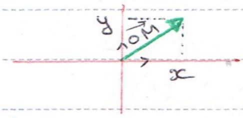
- يسمى المستوي بالمستوي المركب.

ملاحظة :

- يسمى المحور (xx') بحامل أو محور الأعداد الحقيقية.
- يسمى المحور (yy') محور الأعداد التخيلية.

التمثيل الشعاعي :

في المستوي المركب : كل عدد مركب $Z=x+iy$ له تمثيل شعاعيا بالشعاع $\vec{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ أو $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.



ملاحظة :

إذا كان Z و Z' عددان مركبان حيث $Z=x+iy$ و $Z'=x'+iy'$ و M: هي صورة Z و M' هي صورة Z' فإن الشعاع $\vec{MM'}$ هي صورة العدد المركب $Z'-Z$

البرهان : علاقة شال لجمع الأشعة.

مثال :

a، b عددان مركبان حيث $a=3+2i$ ، $b=4-i$

1- عين A و B صورتي a و b على الترتيب

2- عين $b-a$. الحل :

مرافق عدد مركب :

- تعريف :

مرافق العدد المركب $Z=x+iy$ هو العدد المركب الذي نرمز له بالرمز $\bar{Z}$ حيث $\bar{Z}=x-iy$

مثال :

• احسب مرافق الأعداد المركبة التالية :

$a=3+4i$ ، $b=2-5i$ ، $c=4$ ، $d=5i$

• احسب $\bar{a}$ ، $a+\bar{a}$ ، $a-\bar{a}$ ، $b\times\bar{b}$ ، $[Im(a)]^2$ ، $(Re(a))^2$ ، $2i\times Im(b)$.

الحل :
خواص : z عدد مركب :

1) $\bar{\bar{z}} = z$

2) $z + \bar{z} = 2Re(z)$

3) $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$

4) $z.\bar{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$

5) $z = \bar{z}$ معناه z حقيقي

6) إذا كان z صرف تخيلي صرف معناه $\bar{z} = -\bar{z}$

ملاحظة هامة :
لكتابة نسبة $\frac{z_1}{z_2}$ على شكله الجبري نضرب ونقسم هذه النسبة في مرافق المرافق z_2.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \times \frac{\bar{z_2}}{\bar{z_2}}$$

مثال :
أكتب العدد المركب التالي على شكله الجبري.

1) $L_1 = \frac{2-4i}{3+i}$ 2) $L_2 = \frac{5-i}{2i-5}$

ت.م

الحل :
سؤال : أكتب على الشكل الجبري ما يلي : $D = \frac{z-3}{z-5}$
حيث $z = 3i+5$

تقويم جزئي :
العمليات على الأعداد المركبة والمرافق (خواص)
a و b عددان مركبان :

1) $\overline{(a+b)} = \bar{a} + \bar{b}$

2) $\overline{(a \times b)} = \bar{a} \times \bar{b}$

3) $(\bar{a})^n = \overline{(a^n)}$

4) $\overline{\left(\frac{1}{a}\right)} = \left(\frac{1}{\bar{a}}\right)$ $a \neq 0$

5) $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right)$

تمرين : أحسب مرافق a ، b ، c حيث :
$a = \frac{3+4i}{5-2i}$ ، $b = \frac{1}{2i+2}$ ، $c = \frac{2i-5}{(3i+2)^2}$

تقويم مرحلي

* طويلة عدد مركب :
تعريف : طويلة العدد المركب z حيث $z = x+iy$ هي العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{x^2+y^2}$ والتي نشير من الحكايا لنرمز r أو $|z|$ حيث

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

10د تعريفات

مثال : أحسب $|a|$ ، $|b|$ ، $|c|$ حيث :
$a = 3+4i$ $b = -3$ $c = 5i$

الحل :

خواص : Z عدد مركب ،

1) $\bar{\bar{Z}} = Z$ 4) $Z.\bar{Z} = [Re(Z)]^2 + [Im(Z)]^2$

2) $Z + \bar{Z} = 2Re(Z)$ 5) $Z = \bar{Z}$ معناه Z حقيقي

3) $Z - \bar{Z} = 2i\,Im(Z)$ 6) إذا كان Z صرف تخيلي صرف

معناه $\bar{Z} = -Z$

ملاحظة هامة :

لكتابة نسبة $\frac{Z_1}{Z_2}$ على شكله الجبري نضرب ونقسم

هذه النسبة في مرافق المرافق Z_2 .

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \times \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_2}$$

مثال :

أكتب العدد المركب التالي على شكله الجبري .

1) $L_1 = \frac{2-4i}{3+i}$ 2) $L_2 = \frac{5-i}{2i-5}$

الحل :

سؤال : أكتب على الشكل الجبري ما يلي ، $D = \frac{Z-3}{Z-5}$

حيث $Z = 3i + 5$

تقويم جزئي :

التمارين على الأعداد المركبة والمرافق (خواص)

a و b عددان مركبان ،

1) $\overline{(a+b)} = \bar{a} + \bar{b}$ 3) $(\bar{a})^n = \overline{(a^n)}$

2) $\overline{(a \times b)} = \bar{a} \times \bar{b}$ 4) $\overline{\left(\frac{1}{a}\right)} = \left(\frac{1}{\bar{a}}\right)$ $a \neq 0$

5) $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right)$

تمرين ، أحسب مرافق a ، b ، c حيث

$a = \frac{3+4i}{5-2i}$ ، $b = \frac{1}{2i+2}$ ، $c = \frac{2i-5}{(3i+2)^2}$

* طويلة عدد مركب :

تعريف ، طويلة العدد المركب Z حيث $Z = x + iy$ هي العدد

الحقيقي الموجب $\sqrt{x^2+y^2}$ والتي نشير من اليها بالرمز

r أو $|Z|$ حيث

$$r = |Z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

مثال : أحسب $|a|$ ، $|b|$ ، $|c|$ حيث ،

$a = 3+4i$ $b = -3$ $c = 5i$

ت. م.

تقويم مرحلي

١٥ تعريفات

الأستاذ : حشاني حكيم	المستوى : 3 ع ت	التاريخ : 09/02/2014	المؤسسة : ثانوية الطريق الوطني رقم 61 ليوة
المدة:		الموضوع : الأعداد المركبة	

الكفاءة المستهدفة: إجراء عمليات على الأعداد المركبة - حساب طويلة وعمدة عدد مركب غير معدوم - الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل الهندسي.

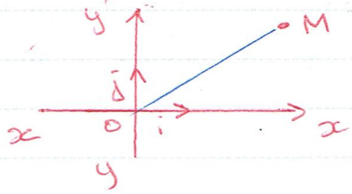
مخطط المذكرة : * التمهيد (أنشطة استكشاف أو لطرح إشكال ..)

* الدرس (تعاريف، خواص، مبرهنات، طرائق، جداول، ملاحظات، أمثلة، ....)

* التقويم (أنشطة تقويم نهائي للدرس)

المرحلة	الأنشطة	المدة

الدرس



التفسير الهندسي للطويلة:

نعلم أن صورة عدد مركب بالتمثيل الشعاعي هي $\vec{OM}$ حيث

$\|\vec{OM}\| = r = \sqrt{x^2+y^2}$

نشاط:

ليكن: $a=3+2i$ ، $b=-i$

1) أحسب $|a|$ ، $|-a|$ ، $|\bar{a}|$

2) أكتب $a\times b$ على الشكل الجبري

3) احسب $|b|$ ثم احسب $|a\times b|$ و $|a|\times|b|$ ، ماذا تلاحظ؟

الحل:

خواص الطويلة: a ، b عددان مركبان ، $n\in\mathbb{Z}$

1) $|a|=|\bar{a}|=|-a|$ 4) $\left|\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{|a|}$

2) $|a\times b|=|a|\times|b|$ 5) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

3) $|a^n|=|a|^n$ 6) $|a+b|\le|a|+|b|$

تمرين:

أحسب $|a|$ ، $|b|$ ، $|a\times b|$ ، $\left|\frac{a}{b}\right|$ ، $|a^{1990}|$ بسط

$\left|\frac{1}{a}\right|$ ، $|-a|\times|\bar{a}|$ حيث $a=1-i$ ، $b=3-4i$

الحل:

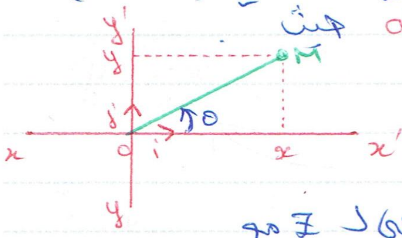
عمدة عدد مركب:

تعريف: ليكن المستوي المركب منسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

z عدد مركب غير معدوم صورته M

- نسمي عمدة العدد المركب z كل قيس للزاوية $(\vec{i},\vec{OM})$

ونرمز لها بالرمز $\arg(z)=\theta$ حيث



$\arg(z)=\theta+2\pi k / k\in\mathbb{Z}$

و $\theta=(\vec{i},\vec{OM})$

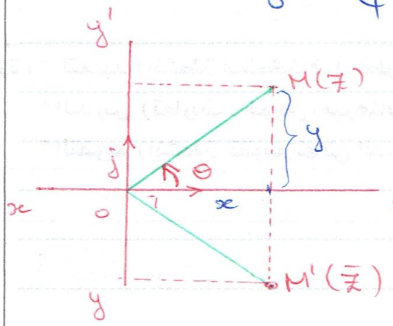
بتعبير آخر: عمدة z هي قيس الزاوية التي يصنعها التمثيل الشعاعي لـ z مع $\vec{i}$

ملاحظة: إذا كان $z=0$ فإنه لا عمدة له.

مثال 2: $a=2i$ صورته $A(0,2)$ إذن $\arg(a)=\frac{\pi}{2}+2\pi K$

$b=1-i$ صورته $B(1,-1)$ إذن $\arg(b)=-\frac{\pi}{4}+2\pi K$

*** خواص عمدة عدد مركب:**



1) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)+2\pi K$

2) ليكن z عدد مركب حيث: $z=x+iy$

إذن صورته هي $M(x,y)$

و $|z|=r$, $\arg(z)=\theta$

لدينا: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$ إذن $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

ومنه $z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta$

$= r(\cos\theta+i\sin\theta)$ تسمى هذه الكتابة بالشكل المثلثي للعدد المركب z.

الشكل المثلثي لعدد مركب: (تعريف)

z عدد مركب غير معدوم حيث $|z|=r$ و $\arg(z)=\theta$

- الشكل المثلثي للعدد المركب z هو:

$$\boxed{z = r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

مثال:

$|a|=\sqrt{2}$ و $\arg(a)=\frac{5\pi}{6}$ فإن شكله المثلثي هو

$a=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

*** الانتقال من الشكل المثلثي أو الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي لعدد مركب:**

الشكل الجبري $\longrightarrow$ $r=\sqrt{x^2+y^2}$; $\begin{cases} \cos\theta=\frac{x}{r} \\ \sin\theta=\frac{y}{r} \end{cases}$ $\longrightarrow$ الشكل المثلثي

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $\longrightarrow$ $z=x+iy$

تمرين: أكتب ما يلي من أعداد مركبة على شكله المثلثي:

1) $a=2+2i$ 2) $b=\sqrt{3}-i$

3) $d=-\sqrt{3}+i$ 4) $c=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

التقويم التكويني

المؤسسة: ثانوية الطريق الوطني رقم 61 ليوة	التاريخ:	المستوى: 3 ع ت	الأستاذ: حشاني حكيم
الوحدة التعليمية: الأعداد المركبة			المدة: ساعة 01
الموضوع: الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم			رقم المذكرة:
الكفاءة القاعدية: الشكل الجبري والمثلثي لعدد مركب غير معدوم			
الكفاءة المستهدفة: كتابة عدد مركب غير معدوم على شكله الأسي.			
الوسائل المستعملة: المنهاج - الكتاب المدرسي - السبورة - مراجع أخرى...			

المرحلة	الأنشطة	المدة

المرحلة: الإكتشاف — **المدة: 15د**

النشاط:

- ليكن Z عدد مركب غير معدوم طويلته "r" و"θ" عمدة له. حيث:

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ولتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي θ معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(\theta) = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{e^{i\theta}}$$

* الأسئلة:

1 - أحسب $f(0)$.

2 - أثبت أن f دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

3 - تحقق أنه من أجل كل θ من $\mathbb{R}$، فإن: $f(\theta) = 1$

4 - استنتج أن: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

5 - استنتج كتابة مختصرة للعدد المركب Z.

المرحلة: البناء — **المدة: 15د**

الحل:

1 - حساب $f(0)$: $f(0) = \frac{\cos(0) + i\sin(0)}{e^{i0}} = \frac{1}{1} = 1$

2 - إثبات أن f دالة ثابتة على $\mathbb{R}$: f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f'(\theta) = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)' e^{i\theta} - (e^{i\theta})'(\cos\theta + i\sin\theta)}{(e^{i\theta})^2}$$

$$= \frac{(-\sin\theta + i\cos\theta)e^{i\theta} - ie^{i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)}{e^{i2\theta}}$$

$$= \frac{\cancel{-\sin\theta . e^{i\theta}} + \cancel{i\cos\theta . e^{i\theta}} - \cancel{i\cos\theta e^{i\theta}} + \cancel{\sin\theta e^{i\theta}}}{e^{i2\theta}}$$

$$= \frac{0}{e^{i2\theta}} = 0$$

3 - التحقق أنه من أجل كل θ من $\mathbb{R}$، فإن $f(\theta) = 1$:

بما أن f ثابتة على $\mathbb{R}$ معناه $f(\theta) = k$ ولدينا $f(0) = 1$.

إذن: $f(\theta) = 1$

4- استنتاج أن: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

نعلم أن $f(\theta)=1$ معناه: $\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{e^{i\theta}}=1$

أي أن: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

5- استنتاج كتابة مختصرة للعدد المركب غير المعدوم z:

لدينا: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ومنه $re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

إذن: $z=re^{i\theta}$

---

04 د

*** تعريف:**

العدد المركب الذي طويلته 1 $(r=1)$ و θ عمدة له يكتب على الشكل $e^{i\theta}$ حيث: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

- هذا الشكل يسمى ترميز أولر.

مثلا: - العدد المركب z_1 حيث $z_1=i$ يكتب على الشكل $e^{i\pi/2}$

- العدد المركب z_2 حيث $z_2=-1$ يكتب على الشكل $e^{i\pi}$

*** الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم:**

العدد المركب غير معدوم الذي طويلته "r" و "θ" عمدة له يكتب على الشكل: $z=re^{i\theta}$

- هذا الشكل يسمى الشكل الأسي للعدد المركب z.

15 د

أمثلة: أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الأسي:

1) $z_1=2+2i$ 2) $z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 3) $z_3=-3e^{i\pi/6}$

الحل:

توسيع الفهم

1/ كتابة z_1 على الشكل الأسي:

1) $z_1=2+2i$

لدينا: أي أن: $|z_1|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ وعليه:

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\quad \theta=\frac{\pi}{4}+2\pi k\ /k\in\mathbb{Z}\qquad \boxed{z_1=2\sqrt{2}e^{i\pi/4}}$$

10 د

2/ كتابة z_2 على الشكل الأسي:

2) $z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|z_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ وعليه:

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

أي أن $\theta=\frac{\pi}{3}+2\pi k\ /k\in\mathbb{Z}$ وإذن $\boxed{z_2=e^{i\pi/3}}$

3/ كتابة z_3 على شكله الأسي:

الشكل $z_3=-3e^{i\pi/6}$ لا يمثل شكلا أسيا.

3) $z_3=-3e^{i\pi/6}=-3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

$|z_3|=\sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=\frac{6}{2}=\frac{3}{1}=3$ وعليه:

$$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{1}{2}\end{cases}\quad \theta=\frac{7\pi}{6}+2\pi k\ /k\in\mathbb{Z}\qquad \boxed{z_3=3e^{i7\pi/6}}$$

التقييم

05 د

تطبيق: أكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة التالية:

1) $z_1=\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ 2) $z_2=\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}$ 3) $z_3=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{6}$

تقويم مرحلي

أمثلة : أكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة التالية

1) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ 2) $z_2 = 2 - 2i$

3) $z_3 = -3e^{i\pi/6}$. هذا ليس شكل أسي.

تقويم نهائي للدرس

تمرين

- اكتب على الشكل الأسي الأعداد التالية

1) $z_1 = 3 - 2i$ 3) $z_3 = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2) $z_2 = 3 + i$ 4) $z_4 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$.

البناء

الخواص الجبرية لعمدة عدد مركب غير معدوم :

z و z' عددان مركبان غير معدومين ، n عدد صحيح نسبي

1) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ 2) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

3) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ 4) $\arg(z^n) = n\arg(z)$

ترسيخ

مثال : $z_1 = \sqrt{3} - i$ $z_2 = 1 + i$

1) أحسب $\arg(z_1)$ ، $\arg(z_2)$

2) استنتج $\arg(z_1 z_2)$ ، $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ ، $\arg(z_1^2)$.

البناء

*الانتقال من الشكل الأسي إلى الشكل المثلثي لعدد مركب والعكس : الانتقال بين الكتابات الثلاثة لعدد مركب :

ش. ج
$z = x + iy$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$

ش. م
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ش. أ
$z = r.e^{i\theta}$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

خواص الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم :

z و z' عددان مركبان غير معدومين ، حيث

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

1) $r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

2) $\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

3) $e^{-i\theta_1} = \frac{1}{e^{i\theta_1}}$

4) $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-\theta i}$

الأستاذ : حشاني حكيم	المستوى :	التاريخ :	المؤسسة : ثانوية الطريق الوطني رقم 61 ليوة

الوحدة التعليمية: الأعداد المركبة

الموضوع: حل معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

المدة:

رقم المذكرة:

الكفاءة القاعدية: الشكل الجبري والأسي والمثلثي لعدد مركب - الجذران التربيعيان لعدد مركب

الكفاءة المستهدفة: حل معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

الوسائل المستعملة: السبورة - الكتاب المدرسي - سلاح الطالب

مخطط المذكرة : * التمهيد (أنشطة استكشاف أو لطرح إشكال ..)

* الدرس (تعاريف، خواص، مبرهنات، طرائق، جداول، ملاحظات، أمثلة، ....)

* التقويم (أنشطة تقويم نهائي للدرس)

المرحلة	الأنشطة	المدة

البناء

حل معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$:

مبرهنة : نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول z حيث $az^2+bz+c=0$ حيث a, b, c معاملات حقيقية و $a\neq0$.

- لحل المعادلة السابقة، نستعين بالمميز Δ حيث $\Delta=b^2-4ac$

1) إذا كان $\Delta>0$ المعادلة تقبل حلين متمايزين في $\mathbb{C}$ هما :

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\quad z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2) إذا كان $\Delta=0$: المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً هو :

$$z_0=\frac{-b}{2a}$$

3) إذا كان $\Delta<0$: للمعادلة حلان مترافقان في $\mathbb{C}$ هما :

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a},\quad z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

ترسيخ

تمرين : حل في $\mathbb{C}$ ما يلي : $z^2-2z+2=0$

حل التمرين :

هذه معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستعين بـ Δ :

$$\Delta=b^2-4ac=4-8=-4<0$$

للمعادلة حلان مترافقان هما :

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2-i\sqrt{4}}{2}=1-i$$

$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2+i\sqrt{4}}{2}=1+i$$

نشاط

تمرين : حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+z+1-i=0$

نستعين بـ Δ :

$$\Delta=b^2-4ac=1^2-4(1-i)=-3+4i$$

هنا نبحث على جذري Δ .

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=-3 \\ 2xy=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=+1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow w_1=+1+2i \\ x=-1 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow w_2=-1-2i \end{cases}$$

ومنه مجموعة الحلول هي :

$$Z_1 = \frac{-b-(1+2i)}{2a} = -1-i$$

$$Z_2 = \frac{-b+(1+2i)}{2a} = i$$

نتيجة : إذا كانت المعاملات a ، b أو c أعداد مركبة ، نبحث عن الجذران التربيعيين لـ Δ لحل المعادلة .

تمرين : حل في $\mathbb{C}$ ما يلي :

1) $Z^2+4=0$

2) $Z^2-iZ+6=0$

3) $Z^2+(2-i)Z=0$.

3) $(Z-2+3i)(Z^2-2Z+3)=0$

تمرين :

a و b عددان مركبان حيث $a=1+i$ و $b=1+i\sqrt{3}$

و $U=a\times b$

1) عين طويلة وعمدة لكل من a و b .

2) استنتج طويلة وعمدة لـ U .

3) أكتب U على شكله الجبري .

4) استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

المؤسسة : ثانوية الطريق الوطني رقم 61 ليوة	**التاريخ :** 2014/02/19	**المستوى :** 3ع ت	**الأستاذ : حشاني حكيم**

الموضوع : دستور موافر، الجذران التربيعيان لعدد مركب غير معدوم **المدة:**

الكفاءة المستهدفة: كيفية البحث على الجذور التربيعية لعدد مركب - كتابة عدد مركب على الشكل $w^2=Z$ حيث نسمي الجذر w

مخطط المذكرة : * التمهيد (أنشطة استكشاف أو لطرح إشكال ..)

* الدرس (تعاريف، خواص، مبرهنات، طرائق، جداول، ملاحظات، أمثلة، ....)

* التقويم (أنشطة تقويم نهائي للدرس)

المرحلة	الأنشطة	المدة
الاستكشاف	نشاط : * Z_1 عدد مركب طويلته $r=1$ و θ عمدة له و $Z=e^{i\theta}$ • أحسب $(e^{i\theta})^2$ ثم استنتج $(e^{i\theta})^n$ * Z_2 عدد مركب طويلته $r\neq 1$ و θ عمدة له. • استنتج Z_2^n ؟ الحل :	
البناء	دستور موافر : مبرهنة : من أجل كل عدد صحيح نسبي n و من أجل كل عدد حقيقي θ ، $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$ نتيجة : Z عدد مركب غير معدوم طويلته r و θ عمدة له. إذا : $Z^n=(re^{i\theta})^n=r^n e^{in\theta}$	
ترسيخ	أمثلة : Z عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له حيث $\theta=\frac{\pi}{6}$ إذن : $(e^{i\frac{\pi}{6}})^9=e^{i\frac{9\pi}{6}}=e^{i\frac{3\pi}{2}}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$ * $Z=3e^{i\frac{\pi}{3}}$ أوجد Z^7 * $(1+i)^{12}$ الجذور التربيعية لعدد مركب (التعريف)	
الاستكشاف	نشاط : عين الجذور التربيعية للأعداد المركبة التالية : $a=4$ ، $b=0$ ، $c=5$ ، $d=-4$ الحل :	
بناء	نتيجة : 1) إذا كان a عدد حقيقي موجب فإنه يقبل جذرين تربيعيين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$. 2) إذا كان a عدد معدوم فإنه يقبل حلا مضاعفا 0 3) إذا كان a عدد سالب فإنه يقبل جذرين تربيعيين هما $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$	

أمثلة :

الجذران التربيعيان له هما : $a=-5$

$$\begin{cases} i\sqrt{-a} = i\sqrt{(-(-5))} = i\sqrt{5} \\ -i\sqrt{-a} = -i\sqrt{5} \end{cases}$$

* إذا كان L عدد مركب وليس حقيقي : أي من الشكل $L=a+ib$ حيث $a,b \in \mathbb{R}$ فهو يقبل جذران تربيعيان .

- نأخذ Z أحد الجذور التربيعية حيث $Z^2=L$

حيث $Z=x+iy$ و $|Z|^2=|L|$

$$Z^2=L \Rightarrow (x+iy)^2 = a+ib$$

$$\Rightarrow x^2-y^2+2xyi = a+ib$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a & \text{------ (1)} \\ 2xy=b & \text{------ (2)} \\ |Z|^2=|L| \Rightarrow x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} & \text{--- (3)} \end{cases}$$

وعليه لإيجاد الجذرين التربيعيين لـ L نقوم بحل جملة المسابقة

مثال

لنبحث على الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z=8-6i$

ليكن $w=x+iy$ جذر تربيعي لـ Z حيث x و y عددان حقيقيان

$$\begin{cases} x^2-y^2=8 & \text{—— (1)} \\ x^2+y^2=10 & \text{—— (2)} \\ 2xy=-6 & \text{—— (3)} \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و(2) نجد : $(1)+(2)$

$$2x^2=18 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=3 \ , \ x=-3$$

1) لما $x=-3$ من (3) نجد : $2(-3)y=-6$

$\Rightarrow y=1 \quad \Rightarrow w_1=-3+i$

2) لما $x=3$ من (3) نجد $2(3)y=-6 \Rightarrow y=-1$

$\Rightarrow w_2=-3-i$

نلاحظ أن $w_1=\overline{w_2}$.

الجذران التربيعيان لعدد مركب

تعريف نسمي جذر تربيعي للعدد Z كل عدد مركب w حيث $w^2=Z$

كل عدد مركب له جذران تربيعيان أحدهما مرافق الآخر .

تمرين

عين الجذرين التربيعين للأعداد التالية :

$-40-42i \ , \ 35-12i \ , \ 9-40i \ , \ -2i$

المؤسسة : ثانوية الطريق الوطني رقم 61 ليوة	التاريخ : 2014/02/26	المستوى : 3ع ت	الأستاذ : حشاني حكيم
الوحدة التعليمية: الأعداد المركبة			المدة:
الموضوع : التفسير الهندسي لـ $\lvert z_A - z_B \rvert$ ، $\left\lvert \frac{z_A-z_B}{z_C-z_D} \right\rvert$ والـ arg			رقم المذكرة:

الكفاءة القاعدية: الشكل الجبري والمثلثي والأسي لعدد مركب. والتمثيل الشعاعي والنقطي

الكفاءة المستهدفة: التفسير الهندسي لكتابة $\lvert z_A - z_B \rvert$، $\left\lvert \frac{z_A-z_B}{z_C-z_D} \right\rvert$، $\arg(z_A - z_B)$ و $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)$

الوسائل المستعملة: السبورة - الكتاب المدرسي - الكوس.

مخطط المذكرة : • التمهيد (أنشطة استكشاف أو لطرح إشكال ..)

• الدرس (تعاريف، خواص، مبرهنات، طرائق، جداول، ملاحظات، أمثلة، .....)

• التقويم (أنشطة تقويم نهائي للدرس)

المرحلة	الأنشطة	المدة

التفسير الهندسي لـ $\lvert z_A - z_B \rvert$:

نتيجة:

التفسير الهندسي لـ $\lvert z_A - z_B \rvert$ هو BA أو $\lVert \overrightarrow{BA} \rVert$

حيث A و B هما صورتا z_A و z_B على الترتيب.

$$z_A - z_B = x_A + iy_A - x_B - iy_B$$

$$= x_A - x_B + i(y_A - y_B)$$

$$\Rightarrow \lvert z_A - z_B \rvert = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \quad \text{.....(1)}$$

ومن جهة أخرى (2) — $BA = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

من (1) و (2) ينتج، $\lvert z_A - z_B \rvert = BA$

تمرين:

$z_A = 1-2i$ و $z_B = 5+2i$ صورتاهما A و B على الترتيب. و z عدد مركب صورته M.

• عين مجموعة النقط M التي تحقق:

$$\lvert z - 1 + 2i \rvert = \lvert z - 5 - 2i \rvert$$

• عين مجموعة النقط M التي تحقق.

$$\lvert z - 1 + 2i \rvert = \lvert z_B - z_A \rvert$$

الحل:

1) تعيين مجموعة النقط M التي تحقق:

$$\lvert z - 1 + 2i \rvert = \lvert z - 5 - 2i \rvert$$

لدينا، $z_A = 1-2i$ و $z_B = 5+2i$

$$\lvert z - (1-2i) \rvert = \lvert z - (5+2i) \rvert$$

$$\Rightarrow \lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert$$

$$\Rightarrow AM = BM$$

ومنه مجموعة النقط M هي المستقيم المحوري للقطعة $[AB]$.

2) تعيين مجموعة النقط التي تحقق $|z-1+2i| = |z_B - z_A|$

$$|z-(1-2i)| = |z_B - z_A|$$

$$\Rightarrow |z - z_A| = AB \Rightarrow AM = AB.$$

ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A و نصف قطرها [AB].

2) التفسير الهندسي لـ $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right|$

نتيجة:

التفسير الهندسي لـ : $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right|$ هو $\frac{AB}{CD}$

$$\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right| = \frac{|z_A-z_B|}{|z_C-z_D|} = \frac{AB}{CD}.$$

تمرين:

A و B صورتا العددين المركبين $z_A = 2i$ و $z_B = 1+2i$

- عين طبيعة النقط M التي تحقق:

$$\left|\frac{z-2i}{z-1-2i}\right| = 1$$

الحل:

لدينا: $z_A = 2i$ و $z_B = 1+2i$ و

$$\left|\frac{z-2i}{z-1-2i}\right| = \left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = \frac{|z-z_A|}{|z-z_B|}$$

$$= \frac{AM}{BM} = 1 \Rightarrow AM = BM.$$

النقط M التي تحقق هذه العلاقة تشكل المستقيم المحوري للقطعة [AB].

3) التفسير الهندسي لـ. $\arg(z_A - z_B)$ / $z_A \neq z_B$

نتيجة: التفسير الهندسي لعمدة العدد المركب $z_A - z_B$

هو: $\arg(z_A-z_B) = (\vec{u}, \vec{BA})$

4) التفسير الهندسي لـ. $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right)$ / $z_A \neq z_C$

نتيجة: التفسير الهندسي لـ $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right)$ هو

$(\vec{AC}, \vec{AB})$

الأستاذ : حشاني حكيم	المستوى :	التاريخ :	المؤسسة : ثانوية الطريق الوطني رقم 61 ليوة
المدة:	الموضوع :		

الكفاءة المستهدفة:

مخطط المذكرة : * التمهيد (أنشطة استكشاف أو لطرح إشكال ..)

* الدرس (تعاريف، خواص، مبرهنات، طرائق، جداول، ملاحظات، أمثلة، ....)

* التقويم (أنشطة تقويم نهائي للدرس)

المرحلة	الأنشطة	المدة

البرهان:

$$\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right)=\arg(z_A-z_B)-\arg(z_A-z_C)$$

$$=(\vec{i},\vec{BA})-(\vec{i},\vec{CA})=(\vec{i}+\vec{BA})+(\vec{CA},\vec{i})$$

$$=(\vec{CA},\vec{i})+(\vec{i},\vec{BA})$$

$$=(\vec{CA},\vec{BA})=(\vec{AC},\vec{AB})$$

تمرين:

$z_B=1-i$ و $z_A=2i$

- عين مجموعة النقط M صورة z والتي يكون من أجلها $\frac{z-2i}{z-1+i}$ عدد حقيقي موجب.

الحل:

$$\frac{z-2i}{z-1+i}=\frac{z-2i}{z-(1-i)}=\frac{z-z_A}{z-z_B}$$

$\frac{z-z_A}{z-z_B}$ حقيقي موجب معناه

$$Arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=0$$

$$Arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=(\vec{MB},\vec{MA})$$

ومنه مجموعة النقط M هي (AB)

لاحقة المرجح:

تعريف:

إذا كان H مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ فإن:

$$z_H=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

تمرين

نعتبر النقط A، B، C لواحقها على الترتيب $z_A=1$

$z_B=2i$ ، $z_C=-1-i$

1) أحسب طويلة $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.

2) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) عين مجموعة النقط M صورة z ويكون من اجلها $\frac{z-1}{z-2i}$ تخيلي صرف

4) عين z_H لاحقة H مرجح الجملة التالية، $\{(A,1);(B,2),(C,-1)\}$.

الحل:

1) حساب طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

يجب كتابة هذا العدد على شكله الجبري،

$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = \frac{2i-1}{-1-i-1} = \frac{2i-1}{-2-i} \times \frac{-2+i}{-2+i}$$ بالضرب في المرافق

$$= \frac{-4i-2+2-i}{(-2)^2-(i)^2} = \frac{-5i}{5} = -i$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = |-i| = 1.$$

$$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

2) التفسير الهندسي

$$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = 1 = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC.$$

ومن جهة أخرى. $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = (\vec{AC},\vec{AB}) = -\frac{\pi}{2}$

نستنتج أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

$$z_H = \frac{1(1)+2(2i)+(-1)(-1-i)}{2} = \frac{2+5i}{2}$$
$$= 1+\frac{5}{2}i.$$

المؤسسة : ثانوية الطريق الوطني رقم 61 ليوة	التاريخ : 2014/03/12	المستوى : 3ع ت	الأستاذ : حشاني حكيم
الموضوع : التحويلات النقطية والأعداد المركبة			المدة:

الكفاءة المستهدفة: الانسحاب La translation ، التحاكي l'homothétie
الدوران Rotation ، التشابه La Similitude

مخطط المذكرة : * التمهيد (أنشطة استكشاف أو لطرح إشكال ..)

* الـدرس (تعاريف، خواص، مبرهنات، طرائق، جداول، ملاحظات، أمثلة، ....)

* التقويم (أنشطة تقويم نهائي للدرس)

المرحلة	الأنشطة	المدة

تذكير

① الانسحاب:

نشاط: المستوي منسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$ حيث: $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 4 \end{cases}$

1 - بين أن $\vec{MM'}$ شعاع ثابت ، ما طبيعة التحويل T .

الحل:

$\vec{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$ ومنه $\vec{MM'}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ومنه $\vec{MM'} = \vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$.

بناء

• من أجل كل M من المستوي ، T تحويل يرفق بكل نقطة M النقطة M' (شعاع ثابت) . T هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

* بواسطة T لا توجد نقاط صامدة.

* T تقابلي معناه لكل نقطة M صورة وحيدة M' والعكس صحيح.

* إذا كانت A' هي صورة A بالانسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}$ و B' هي صورة B بنفس الانسحاب ، فإن : $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ وهذا يعني أن الانسحاب تقايس ، فهو يحافظ على الأطوال .

② التحاكي :

استكشاف

نشاط : المستوي منسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$. h تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M من المستوي $M(x,y)$ نقطة $M'(x',y')$ حيث : $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y \end{cases}$

① عين مجموعة النقط الصامدة بواسطة h .

② لتكن ω هي النقطة الصامدة ، عبر عن $\vec{\omega M'}$ بدلالة $\vec{\omega M}$

③ هل h تقايس بواسطة h .

الحل : لتكن $M(x,y)$ هي نقطة صامدة معناه $h(M) = M'$

يعني $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ ، أي $\begin{cases} 2x - 1 = x \\ 2y = y \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

ومنه النقطة الصامدة هي $\omega(1,0)$.

② لتكن $M'(x',y')$ و $\omega(1,0)$ ومنه $\overrightarrow{\omega M'}\begin{pmatrix}x'-1\\y'-0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{\omega M'}\begin{pmatrix}x'-1\\y'\end{pmatrix}$

أي $\overrightarrow{\omega M'}\begin{pmatrix}2x-1-1\\2y\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{\omega M'}\begin{pmatrix}2x-2\\2y\end{pmatrix}$ ومنه: $\overrightarrow{\omega M'}=2\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$ (1)

ومن جهة أخرى $\overrightarrow{\omega M}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{\omega M}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$ .... (2)

من (1) و (2) يكون $\overrightarrow{\omega M'}=2\overrightarrow{\omega M}$

نسمي h التحاكي الذي مركزه ω ونسبته $K=2$.

③ هل h تقايس؟

لتكن (A,B) ثنائية نقطية صورتها (A',B') بالتحويل h أي

$A\xmapsto{h}A'$ و $B\xmapsto{h}B'$ ومنه $\overrightarrow{\omega A'}=2\overrightarrow{\omega A}$ —— (I)

و $\overrightarrow{\omega B'}=2\overrightarrow{\omega B}$ —— (II)

$$(I)-(II)\Rightarrow \overrightarrow{\omega A'}-\overrightarrow{\omega B'}=2\overrightarrow{\omega A}-2\overrightarrow{\omega B}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{\omega A'}-\overrightarrow{\omega B'}=2(\overrightarrow{\omega A}-\overrightarrow{\omega B})$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{\omega A'}+\overrightarrow{B'\omega}=2(\overrightarrow{\omega A}+\overrightarrow{B\omega})$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{B'A'}=2\overrightarrow{BA}$$

وهذا يوضح أن h ليس تقايس.

تعريف التحاكي

O نقطة من المستوي، K عدد حقيقي غير معدوم. نسمي تحاكيا مركزه O ونسبته K، ونرمز له بالرمز $h(O,K)$، التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث: $\overrightarrow{OM'}=K\overrightarrow{OM}$

العبارة التحليلية للتحاكي: المستوي منسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\omega(x_0,y_0)$ و $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ إذا كان $\overrightarrow{\omega M'}=K\overrightarrow{\omega M}$

معناه: $\begin{cases}x'-x_0=K(x-x_0)\\y'-y_0=K(y-y_0)\end{cases}$ أي $\begin{cases}x'=Kx+(1-K)x_0\\y'=Ky+(1-K)y_0\end{cases}$

وهي العبارة التحليلية للتحاكي.

خواص التحاكي:

1) التحاكي $h(O,K)$ تحويل تقابلي تحويله العكسي هو تحاكي $h(\omega,\frac{1}{K})$

لأن $\overrightarrow{\omega M'}=K\overrightarrow{\omega M}$ معناه $\overrightarrow{\omega M}=\frac{1}{K}\overrightarrow{\omega M'}$

2) إذا كان $K\neq -1$ فهو ليس تقايس.

3) التناظر هو حالة خاصة من التحاكي لأن $\overrightarrow{\omega M'}=-\overrightarrow{\omega M}$

أي $K=-1$ وهو تقايس.

سؤال:

عين (Δ') صورة المستقيم (Δ) ذو المعادلة $2x-3y-1=0$

لدينا $\begin{cases}x'=2x-1\\y'=2y\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}y'\end{cases}$ نعوض x و y في معادلة (Δ) نجد

ومنه: $2(\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2})-3(\frac{1}{2}y')-1=0$ أي $x'+\cancel{1}-\frac{3}{2}y'-\cancel{1}=0$

أي $x'-\frac{3}{2}y'=0$ ، هي معادلة (Δ')

- نلاحظ أن $(\Delta)\parallel(\Delta')$ ، لهما نفس معامل التوجيه

③ الدوران:

نشاط: $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر، R تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$ حيث.

$$\begin{cases} x'=1+y \\ y'=1-x. \end{cases}$$

① عين مجموعة النقط الصامدة

② أثبت أن التحويل R تقايس

③ عين صورة المستقيم (Δ) ذي المعادلة $2x-3y-1=0$ بنفس التحويل R.

④ ماذا (Δ) و(Δ') متعامدان.

الإجابة:

لتكن $M(x,y)$ صامدة بواسطة R حيث $M'=R(M)$

معناه $\begin{cases} x'=x \\ y'=y. \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 1+y=x \\ 1-x=y. \end{cases}$ أي $\begin{cases} 1+(1-x)=x \\ 1-x=y. \end{cases}$

أي أن $\begin{cases} 2x=2 \\ y=1-x \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=1 \\ y=0. \end{cases}$ إذن $\omega(1,0)$ هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل R.

② R تقايس؟

نكن $A(x_1,y_1)$ ، $B(x_2,y_2)$ و $A'(x_1',y_1')$ و $B'(x_2',y_2')$

ومنه $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ و $A'B'=\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2}$

ومن جهة أخرى $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x_2'-x_1' \\ y_2'-y_1' \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} \cancel{1}+y_2-\cancel{1}-y_1 \\ \cancel{1}-x_2-\cancel{1}+x_1 \end{pmatrix}$

ومنه $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} y_2-y_1 \\ -(x_2-x_1) \end{pmatrix}$

أي $A'B'=\sqrt{(y_2-y_1)^2+(-(x_2-x_1))^2}=AB$

ومنه نستنتج أن R تقايس أي $\omega M=\omega M'$

$A \to A'$
$\begin{cases} x_1'=1+y_1 \\ y_1'=1-x_1 \end{cases}$

$B \to B'$
$\begin{cases} x_2'=1+y_2 \\ y_2'=1-x_2 \end{cases}$

③ (Δ')؟

لدينا، $(\Delta): 2x-3y-1=0$ ، و $\begin{cases} y=x'-1 \\ x=1-y' \end{cases}$

بتعويض x و y بدلالة x' و y' في المعادلة (Δ) نجد:

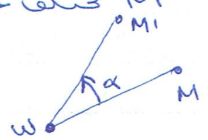
$-3x'-2y'+4=0.$

. لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ و $\vec{u'}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ شعاعي توجيه لـ (Δ) و (Δ')

$\vec{u}\cdot\vec{u'}=0$

إذن التحويل النقطي الذي نحن بصدده هو دوران مركزه $\omega(1,0)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

تعريف : ω نقطة من المستوي الموجه و α عدد حقيقي
- نسمي دوران مركزه ω و زاويته α كل تحويل نقطي يرفق بالنقطة M من المستوي النقطة M' تختلف عن ω
حيث : $\omega M' = \omega M$ و $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \alpha$
ونكتب $R(\omega, \alpha)$.



خواص الدوران :

• الدوران الذي مركزه ω وزاويته غير معدومة له نقطة صامدة وحيدة هي المركز ω.

• الدوران الذي مركزه ω وزاويته α تحويل تقابلي وتحويله العكسي R^{-1} مركزه ω وزاويته $-\alpha$.

• **الخاصية المميزة للدوران :**
صورة (A,B) الثنائية بالدوران الذي مركزه ω و زاويته α هي الثنائية (A',B') حيث $A'B' = AB$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha$
أي أن الدوران تقايس.

تمرين 03 ص 137 :

المستوي مستوٍ إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
G تحويل يرفق بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي النقطة $M'(x',y')$ وفق العلاقة التالية

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

1) أثبت أن $OM = OM'$
2) أثبت أن $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$
3) ما هو تخمينك فيما يخص طبيعة التحويل G.

الحل :

1) الحساب مركبات كل شعاع والطويلة
2) الجداء السلمي $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0$

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية.

① التعريف بالانسحاب باستخدام الأعداد المركبة

T انسحاب شعاعه $\vec{u}\binom{c}{d}$. صورة M بواسطة T هي M'. z هو لاحقة M و z' هي لاحقة M'.
نعلم أن $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ ما يقابله : $z' - z = \vec{u}\binom{c}{d}$
أي $z' - z = c + id$ أي أن $z' = z + c + id$.
بوضع $b = c + id$ نجد $z' = z + b$ وهو تعريف الانسحاب باستخدام العبارة المركبة.

نتيجة : كل انسحاب شعاعه $\vec{u}$ يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ يكتب على الشكل : $z' = z + b$ أو بعبارة أخرى

$$z_{M'} = z_M + z_{\vec{u}}$$

مثال : الصيغة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\binom{3}{4}$ هي $z' = z + 3 + 4i$ أي $M(z) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} M'(z')$

تمرين :

$Z_A = 2-i$ لاحقة A عين $Z_{A'}$ لاحقة A' صورة A بالانسحاب الذي لاحقة شعاعه $Z_{\vec{u}} = 3-2i$.

الحل :

$Z_{A'} = Z_A + Z_{\vec{u}}$ ومنه $Z_{A'} = 2 - i + (3-2i)$

$Z_{A'} = 2+3-3i = 5-3i$

وإذن $Z_{A'} = 5-3i$ لاحقة $A'(5,-3)$.

تمرين :

• ماهي صورة الدائرة $C(w(1,-1),2)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}\binom{3}{2}$

• ماهي صورة القطعة $[AB]$ حيث $A(1,2)$ و $B(3,-2)$ بنفس التحويل.

الحل :

- صورة الدائرة $C(w(1,-1),2)$ هي دائرة C' مركزها w'

$Z_{w'} = Z_w + Z_{\vec{V}}$ أي $Z_{w'} = 1-i+3+2i$

$Z_{w'} = 4+i \Rightarrow w(4,1)$.

ومنه صورة $C(w(1,-1),2)$ هي دائرة $C'(w'(4,1),2)$.

- صورة القطعة $[AB]$ هي قطعة $[A'B']$ حيث

$Z_{A'} = Z_A + Z_{\vec{V}}$ أي $Z_{A'} = 1+2i+3+2i$ أي $Z_{A'} = 4+4i$ $A'(4,4)$

و $Z_{B'} = Z_B + Z_{\vec{V}}$ أي $Z_{B'} = 3-2i+3+2i$ أي $Z_{B'} = 6$. $B'(6,0)$

⑤ تعريف الدوران باستخدام الأعداد المركبة :

يكن التحويل النقطي R هو دوران حيث $R(w,\alpha)$ أي مركزه w وزاويته α . أي $R: M(Z) \longrightarrow M'(Z')$

ومنه :
$$\begin{cases} wM' = wM \\ (\vec{wM}, \vec{wM'}) = \alpha \end{cases}$$

$M \neq w$ $\vec{wM'} = Z' - Z_w \Rightarrow wM' = |Z' - Z_w|$

$\vec{wM} = Z - Z_w \Rightarrow wM = |Z - Z_w|$

ولدينا $wM' = wM \Rightarrow$

$|Z' - Z_w| = |Z - Z_w|$

$\Rightarrow \dfrac{|Z'-Z_w|}{|Z-Z_w|} = 1$,

و $\arg\left(\dfrac{Z'-Z_w}{Z-Z_w}\right) = (\vec{wM}, \vec{wM'})$ المغني ص 312

وعليه نكتب الشكل الأسي :

$\dfrac{Z'-Z_w}{Z-Z_w} = 1\, e^{i\alpha}$

$\Rightarrow Z' - Z_w = e^{i\alpha}(Z - Z_w)$

$\Rightarrow Z' = e^{i\alpha}(Z - Z_w) + Z_w$.

نتيجة:

كل دوران مركزه ω لاحقتها Z_ω و زاويته α و يرفق بكل نقطة $M(Z) \neq \omega$. النقطة $M'(Z')$ يكون من أجله

$$Z' = e^{i\alpha}(Z - Z_\omega) + Z_\omega$$

تسمى هذه العبارة بالصيغة المركبة للدوران.

تمرين:

1) أكتب الصيغة المركبة للدوران R الذي مركزه $\omega(1,1)$ و زاويته $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

2) أوجد $Z_{A'}$ لاحقة صورة A بنفس الدوران، حيث $A(3,-2)$

الحل:

. الصيغة المركبة للدوران R.

$$Z' = e^{i\alpha}(Z - Z_\omega) + Z_\omega$$

$$= e^{-i\pi/2}(Z - (1+i)) + (1+i)$$

لدينا: $e^{-i\pi/2} = \cancel{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$= -i$$

$$\Rightarrow Z' = -i\,(Z - 1 - i) + (1+i)$$

$$= -iZ + i - 1 + 1 + i$$

$$= -iZ + 2i \Rightarrow \boxed{Z' = -iZ + 2i}$$

. تعيين $Z_{A'}$ لاحقة A' صورة A بهذا الدوران

$$Z_{A'} = -i\,Z_A + 2i = -i(3-2i) + 2i$$

$$= -3i - 2i + 2i = -3i$$

$$\Rightarrow A'(0,-3).$$

تمرين: ت 163 ص 159

نعتبر النقط $A(1,1)$ ، $B(1,0)$ ، $C(0,2)$ ، $D(0,-1)$

- عين الصيغة المركبة للدوران الذي يحول A إلى B و C إلى D

③ تعريف التحاكي باستخدام الأعداد المركبة:

ليكن التحاكي h الذي مركزه ω و نسبته K يحول $M(Z)$ إلى $M'(Z')$. $\overrightarrow{\omega M'} = K\,\overrightarrow{\omega M}$.

$$\Rightarrow Z' - Z_\omega = K(Z - Z_\omega).$$

حيث $\omega(Z_\omega)$. و هي الصيغة المركبة للتحاكي

نتيجة:

كل تحاكي مركزه ω و نسبته K يحول $M(Z)$ إلى $M'(Z')$ تكون صيغته المركبة: $Z' = K(Z - Z_\omega) + Z_\omega$.

تمرين:

h تحاكي نسبته $K=-3$ و مركزه $\omega(-1,2)$. هات الصيغة المركبة لهذا التحاكي ثم استنتج لواحق A'، B' صور $A(3,5)$، $B(-1,-1)$.

الحل:

خلاصة : المستوي منسوب إلى م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، f تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z نقطة $M'(z')$
حيث $z' = az + b$

الحالة (1) :

1) لما $a = 1$ و $b \neq 0$ يكون $z' = z + b$ يعني $z' - z = b$
ومنه $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ حيث $\vec{u}$ هو لاحقة b ، إذن f إنسحاب شعاعه $\vec{u}$.

الحالة (2) :

1) لما $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ و $z' = az + b$

• النقطة الصامدة M يكون من أجلها $z = az + b$
أي $z_\omega = \frac{b}{1-a}$ ، بواسطة f يوجد نقطة صامدة وحيدة ω لاحقتها $z_\omega = \frac{b}{1-a}$.

• لدينا
$$\begin{cases} z' = az + b \quad \ldots(1) \\ z_\omega = az_\omega + b \quad \ldots(2) \end{cases}$$
$(1)-(2) : z' - z_\omega = a(z - z_\omega)$
$= \overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\omega M}$

ومنه f تحاكي مركزه ω ونسبته a.

الحالة (3) :

1) لما $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$ و $z' = az + b$.

دوما النقطة الصامدة ω لاحقتها $z_\omega = \frac{b}{1-a}$.
$$\begin{cases} z' = az + b \quad —(1) \\ z_\omega = az_\omega + b \quad —(2) \end{cases}$$
$(1)-(2) \Rightarrow z' - z_\omega = a(z - z_\omega)$

معناه $a = \frac{z' - z_\omega}{z - z_\omega}$ ولدينا $|a| = 1 \Rightarrow |z' - z_\omega| = |z - z_\omega|$

أي أن $\omega M' = \omega M$ و $\arg(a) = \arg\left(\frac{z' - z_\omega}{z - z_\omega}\right)$
$= (\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'})$

ومنه f دوران مركزه ω وزاويته θ عمدة a.

تمرين : f تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$
حيث $z' = z - \sqrt{3}i$

• عين طبيعة التحويل f محددا عناصره.

2) f تحويل نقطي يرفق بكل ... حيث $z' = iz + \sqrt{3}(1-i)$

• عين طبيعة التحويل f.

• بين أن من أجل $M \neq \omega$ ، المثلث $\omega MM'$ قائم

حل التمرين :

$A(1,1)$ ، $B(1,0)$ ، $C(0,2)$ ، $D(0,-1)$

لدينا f دوران ، معناه

$z' = e^{i\alpha}(z - z_\omega) + z_\omega$.

ملخص التحويلات النقطية و الأعداد المركبة (الأستاذ : ح. حشاني)

كل تحويل نقطي تكتب صيغته المركبة العامة على الشكل : $Z' = aZ + b$
لذا نميز حسب قيم العدد a أربع حالات أو أربع تحويلات نقطية :

$a \in IR$

$a = 1$: $T(\vec{U})$

التحويل في هذه الحالة هو انسحاب شعاعه $\vec{U}$ الذي لاحقته b
مثلا : التحويل النقطي المعرف بـ: $Z' = Z + 2 - i$ هو انسحاب شعاعه $\vec{U}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$a \neq 1$: $h(\omega, k)$

التحويل في هذه الحالة هو تحاكي مركزه ω ذات اللاحقة Z_ω حيث $Z_\varpi = \dfrac{b}{1-a}$ و نسبته هي نفسها a
مثلا : التحويل النقطي المعرف بـ: $Z' = -5Z + 4 - 5i$ تحاكي مركزه ω ذات اللاحقة Z_ω حيث $Z_\varpi = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{4-5i}{1-(-5)} = \dfrac{4}{6} - \dfrac{5}{6}i$

$a \in C$

$|a| = 1$: $R(\omega, \alpha)$

التحويل في هذه الحالة هو دوران مركزه ω ذات اللاحقة Z_ω حيث $Z_\varpi = \dfrac{b}{1-a}$ و زاويته هي عمدة a
مثلا : التحويل النقطي المعرف بـ: $Z' = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z + 3 + i$ دوران مركزه ω ذات اللاحقة Z_ω حيث $Z_\varpi = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{3+i}{1-(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)} = ...$ و زاويته $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

$|a| \neq 1$: $S(\omega, k, \alpha)$

التحويل في هذه الحالة هو تشابه مباشر مركزه ω ذات اللاحقة Z_ω حيث $Z_\varpi = \dfrac{b}{1-a}$ و نسبته هي طويلة a و زاويته هي عمدة a
مثلا : التحويل النقطي المعرف بـ: $Z' = 3iZ + 2 + 2i$ تشابه مباشر مركزه ω ذات اللاحقة Z_ω حيث $Z_\varpi = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{2+2i}{1-(3i)} = ...$ و نسبته 3 و زاويته $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

إذا كانت ω نقطة صامدة و هي مركز التحويل فهي تحقق $Z_\omega = aZ_\omega + b$ و منه $Z_\varpi = \dfrac{b}{1-a}$